From ParGO - Paralelismo, Grafos e Otimização

Manuscritos: Implicações Lógicas

Uma outra forma de compor sentenças, forma essa amplamente utilizada na descrição de teorias matemáticas, é através do uso da *implicação lógica* (ou simplesmente *implicação*). Essa forma de combinação de sentenças pode ser descrita da seguinte maneira. Sejam P e Q duas sentenças quaisquer. Podemos formar uma terceira sentença composta do tipo "P *implica* Q", a qual pode ser escrita

> "se P, então Q"

ou ainda

> "$P \Rightarrow Q$"

Nessa implicação, chamamos P de *hipótese* e Q de *conseqüência*. Uma implicação somente é considerada **F** quando o valor **V** para a consequência decorre do valor **V** para a hipótese. Em outras palavras, uma implicação traduz a ideia, frequentemente empregada em desenvolvimentos lógicos, da consequência de se ter quando uma determinada sentença é satisfeita. Um exemplo de implicação lógica é a Proposição 15 de **Os Elementos de Euclides**, que consiste na seguinte generalização da **afirmação** mencionada anteriormente:

> "Se duas linhas retas se intersectam, então os ângulos verticalmente opostos são iguais."

Ao mostrar que essa sentença é **V**, Euclides nos mostrou que, sempre que a hipótese for **V** ("duas linhas retas se intersectam"), a consequência será **V** ("os ângulos verticalmente opostos são iguais"). O valor lógico de $P \Rightarrow Q$ é determinado examinando-se os seguintes casos:

Caso 1. P é **V**
: a implicação recebe o valor lógico de Q. Neste caso, dizemos que a implicação é *satisfeita* quando Q é **V**.

Caso 2. P é **F**
: a implicação recebe **V**. Dizemos, neste caso, que a implicação é *satisfeita por vacuidade*.

Em outras palavras, o valor lógico de $P \Rightarrow Q$ é o mesmo de $\neg P \vee Q$. Observe que o único caso em que a implicação não é satisfeita é quando a hipótese se verifica (isto é, P é **V**) e a conseqüência não se verifica (isto é, Q é **F**). Esse comportamento é refletido na **tabela-verdade para a implicação lógica** $P \Rightarrow Q$.

Attach:img27.png Δ | **Figura** Tabela-verdade para a implicação lógica	Uma divertida

$P \Rightarrow Q$

charada ilustra o significado da implicação lógica. Imagine que encontramos duas pessoas, e sabemos que cada uma delas sempre diz a verdade ou sempre mente. Porém, não conhecemos as pessoas que encontramos, portanto não sabemos se ambas sempre falam a verdade, se ambas sempre mentem, ou se uma delas sempre mente e a outra sempre diz a verdade. Ao nos encontrar, uma das pessoas diz:

> "Se sempre digo a verdade, então meu colega também sempre diz a verdade."

Visto que tal sentença é uma implicação lógica, podemos tentar analisá-la para tentar descobrir se a pessoa falou a verdade ou mentiu. Suponha que a pessoa que falou sempre minta. Então, a afirmação dela deve ser **F**, o que só acontece se "sempre digo a verdade" é **V** e "meu colega sempre diz a verdade" é **F**. Ora, nós supusemos que "sempre digo a verdade" é **F** ao supor que a pessoa que falou sempre mente, e concluimos que a conseqüência é que "sempre digo a verdade" é **V**. Como não é possível que uma mesma sentença seja, ao mesmo tempo, **V** e **F**, temos que a hipótese inicial não pode ocorrer. Portanto, a pessoa falou a verdade. è deixada ao leitor a verificação que essa hipótese (a pessoa falou a verdade) não leva a uma incoerência.

Uma quarta forma de compor sentenças é através da *equivalência lógica* ou simplesmente *equivalência*. Novamente, sejam P e Q duas sentenças simples. Podemos compor uma terceira sentença do tipo: "P é equivalente a Q" ou "P se e somente se Q", ou ainda $P \Leftrightarrow Q$. O sentido exato de uma equivalência é o de uma implicação dupla, ou seja, $P \Leftrightarrow Q$ é **V** quando ambas as implicações $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$ são **V**. Logo, para que $P \Leftrightarrow Q$ seja **V** é preciso que P e Q sejam ambas **F** ou ambas **V** simultaneamente, conforme mostrado na **tabela-verdade para a equivalência lógica** $P \Leftrightarrow Q$.

Attach:img30.png Δ | **Figura:** Tabela-verdade para a equivalência lógica $P \Leftrightarrow Q$.

Alternativamente, temos que quando "P se e somente se Q" é **V**, isso significa que:

1. "P, se Q", o que significa que Q ser **V** é suficiente para que P seja **V**; e
2. "P, somente se Q", ou seja, Q ser **V** é necessário para que P seja **V** pois Q sendo **F**, P também o será.

Não é difícil verificar que a formulação em **1** quer dizer que Q implica P e que a formulação em **2** quer dizer que P implica Q.

Fazemos a seguir um resumo do assunto exposto acima. Sejam P e Q duas sentenças quaisquer. Considere a análise das seguintes sentenças compostas abaixo:

1. Considere a sentença $R = P \wedge Q$. A sentença R é **V** somente se ambas P e Q forem **V**. Logo, para estabelecer o valor **V** de R, ambas P e Q devem ser analisadas.
2. Considere a sentença $R = (P \vee Q)$. Temos que R é **V** somente se pelo menos uma das

sentenças P ou Q é **V**. Logo, para estabelecer o valor **F** de R, ambas P e Q devem ser analisadas.

3. Considere a sentença $R = (P \Rightarrow Q)$. Temos que R é **F** somente quando P é **V** e Q é **F**. Logo, quando P for **V**, para que R seja **V**, precisamos verificar o valor de Q. R será **V** se Q o for. Caso contrário, quando P for **F**, R será **V**.
4. Considere a sentença $R = (P \Leftrightarrow Q)$. Temos que R é **V** quando ambas P e Q forem **F** ou quando ambas P e Q forem **V**. Em todos os outros casos, R será **F**.
